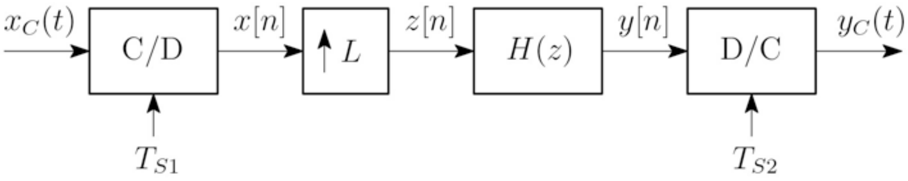
Tratamiento Digital de Señales **SOLUCIÓN** *21 de enero de 2019* *1er Parcial*

Apellidos ______________________________ **Nombre** ______________________________

DNI: ____________________ **Calificación** ________1 + ________2 = __________

1. Considere el sistema de procesado discreto de la figura:



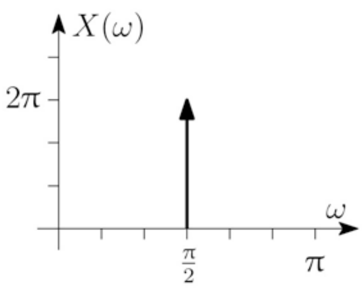
en el que se procesa la señal de entrada continua $x_C(t)$ para producir la señal de salida continua $y_C(t)$. Los detalles de los elementos del esquema son los siguientes:

1. la frecuencia de muestreo del conversor C/D ideal es $f_{S1} = 1/T_{S1} = 1\,\text{kHz}$.
2. el factor de expansión del expansor es $L = 3$.
3. el sistema discreto $H(z)$ es un filtro *paso alto* ideal con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/3$ y ganancia $G = 1/2$; es decir:
$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \pi/3 \\ 1/2, & \pi/3 < |\omega| < \pi \end{cases}$$
4. la frecuencia de reconstrucción del conversor D/C ideal es $f_{S2} = 1/T_{S2} = 2\,\text{kHz}$.

Sea la señal de entrada $x_C(t) = 2\cos(2\pi 250 t)$.

En los apartados siguientes se piden las expresiones matemáticas de las señales y las representaciones gráficas de sus transformadas de Fourier. Todas las expresiones deben indicarse en el dominio del tiempo. Las gráficas deben anotarse con los valores adecuados. Tanto las expresiones como las gráficas deben estar suficientemente razonadas. Por si no la recuerda, la propiedad $\delta(a\omega) = \frac{1}{|a|}\delta(\omega)$ puede serle muy útil.

a) Dibuje $X(\omega)$, transformada de Fourier de $x[n]$, en el intervalo $[0, \pi]$. **(0.5 puntos)**

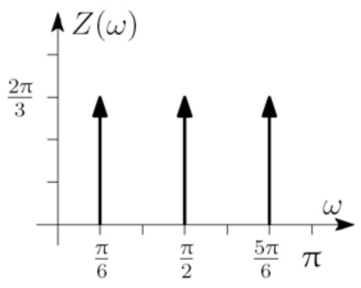


- *La frecuencia de muestreo es superior a la tasa de Nyquist por lo que no se produce "aliasing"*
- *La transformada de Fourier se calcula como:* $X(\omega) = \frac{1}{T_{S1}} X_C\left(\frac{\omega}{T_{S1}}\right)$, $|\omega| < \pi$
- *En el intervalo* $[0, \pi]$*:* $X(\omega) = \frac{1}{T_{S1}} 2\pi\delta\left(\frac{1}{T_{S1}}(\omega - \Omega_0 T_{S1})\right) = 2\pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi 250}{1000}\right) = 2\pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$

b) Escriba la expresión de $x[n]$. **(0.5 puntos)**

- *La señal discreta es:* $x[n] = x_C(nT_{S1}) = 2\cos\left(2\pi 250 \frac{n}{1000}\right) = \boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)}$.
- *Este resultado podría haberse obtenido también a partir de la transformada* $X(\omega)$

c) Dibuje $Z(\omega)$, transformada de Fourier de $z[n]$, en el intervalo $[0, \pi]$. **(0.5 puntos)**

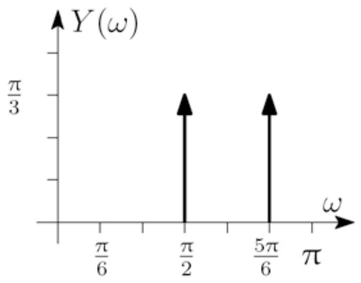


- *La transformada de* $z[n]$ *es* $Z(\omega) = X(\omega L) = X(3\omega)$
- $2\pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$ *se convierte en* $2\pi\delta\left(3\omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\delta\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)$
- *En el intervalo* $[0, \pi]$ *aparecen otras dos* δ*'s debidas a la periodicidad de* $X(\omega)$*:*
  - $2\pi\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right)$ *se convierte en* $2\pi\delta\left(3\omega - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$
  - $2\pi\delta\left(\omega - \frac{5\pi}{2}\right)$ *se convierte en* $2\pi\delta\left(3\omega - \frac{5\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\delta\left(\omega - \frac{5\pi}{6}\right)$

d) Escriba la expresión de $z[n]$. **(0.5 puntos)**

- *La expresión genérica es:* $z[n] = \begin{cases} x[n/3] & 3 \mid n \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
- *A partir de la gráfica de la transformada puede verse que la señal está formada por tres cosenos de amplitud 2/3, por lo que puede escribirse:* $\boxed{z[n] = \frac{2}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}n\right)\right]}$

e) Dibuje $Y(\omega)$, transformada de Fourier de $y[n]$, en el intervalo $[0, \pi]$. **(0.5 puntos)**

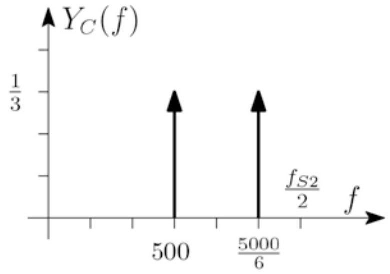


- *El filtro paso alto ideal anula las componentes inferiores a* $\omega_c = \pi/3$
- *En este caso, se anula el coseno a frecuencia* $\pi/6$
- *Los otros dos cosenos pasan por el filtro afectados sólo por la ganancia* $1/2$ *del filtro*

f) Escriba la expresión de $y[n]$. **(0.5 puntos)**

- *La expresión genérica es:* $y[n] = h[n] * z[n]$*, con* $h[n]$ *la respuesta al impulso del filtro paso alto.*
- *A partir de la transformada se obtiene:* $\boxed{y[n] = \frac{1}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}n\right)\right]}$

g) Dibuje $Y_C(f)$, transformada de Fourier de $y_C(t)$, en el intervalo $[0, \frac{f_{S2}}{2}]$. **(0.5 puntos)**



- *La transformada de Fourier a la salida del conversor D/C ideal es:* $Y_C(\Omega) = T_{S2} X\left(\Omega T_{S2}\right)$
- *En este caso:* $Y_C(\Omega) = T_{S2}\frac{\pi}{3}\left[\delta\left(T_{S2}\left(\Omega - \frac{\pi}{2T_{S2}}\right)\right) + \delta\left(T_{S2}\left(\Omega - \frac{5\pi}{6T_{S2}}\right)\right)\right] = \frac{\pi}{3}\left[\delta\left(\Omega - 1000\pi\right) + \delta\left(\Omega - \frac{5000}{3}\pi\right)\right] \ \Omega > 0$
- *En frecuencia:* $Y_C(f) = \frac{1}{3}\left[\delta\left(f - 500\right) + \delta\left(f - \frac{5000}{6}\right)\right] \ f > 0$

h) Escriba la expresión de $y_C(t)$. **(0.5 puntos)**

- *La expresión genérica es:* $y_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin(\pi(t-nT_{S2})/T_{S2})}{\pi(t-nT_{S2})/T_{S2}}$.
- *A partir de la transformada se obtiene:* $\boxed{y_C(t) = \frac{1}{3}\left[\cos\left(2\pi 500 t\right) + \cos\left(2\pi\frac{5000}{6}t\right)\right]}$

2. Considere una señal $x_c(t)$ en tiempo continuo con una banda de interés de 4KHz. Para obtener la señal $x[n] = x_a(nT)$, se utiliza un filtro paso bajo $H_a(F)$ y un C/D ideales como se indica en la *Figura-1*

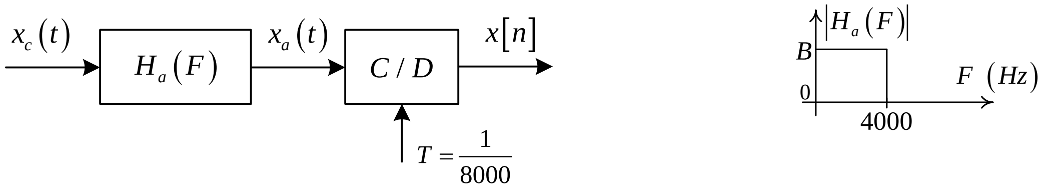


Figura-1

También la señal $x_c(t)$ se muestrea utilizando el sistema de la *Figura-2*

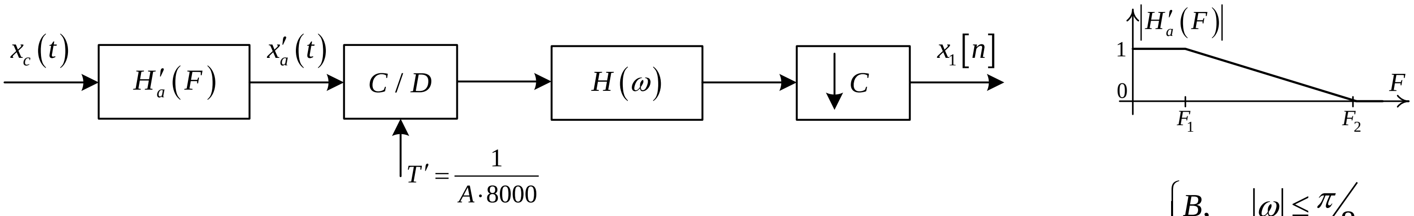
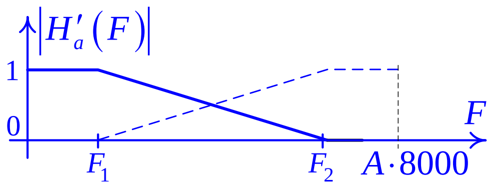


Figura-2

$$H(\omega) = \begin{cases} B, & |\omega| \le \pi/8 \\ 0, & \pi/8 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

a) Para que $x_1[n]$ sea igual a $x[n]$, **<u>determine razonadamente</u>** el valor de cada uno de los siguientes parámetros: F_1, F_2, A, B y C. Tiene que calcular F_2 para que el filtro $H'_a(F)$ sea de mínima pendiente. **(3 puntos)**



$A = C = 8$

$B = 1$

$F_1 = 4000\ Hz$

$F_2 = A \cdot 8000 - 4000 = 60000\ Hz$

F_1	4.000 Hz
F_2	60.000 Hz
A	8
B	1
C	8

b) **<u>Responda razonadamente</u>** a cada una de las siguientes preguntas con respecto a la Figura-1.

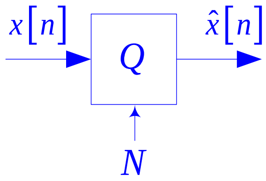
i) Cuál es la relación señal a ruido a su salida.

ii) Que tendríamos que añadir a su salida si se quisiera que la relación señal a ruido fuese aproximadamente de 72dB.

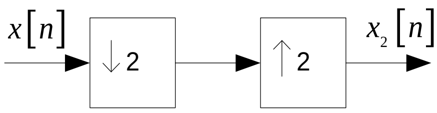
(1,5 puntos)

i) $SNR = \infty$ porque el C/D es ideal.

ii) $SNR \; = \; 6{,}02 \cdot N - 7{,}25 \; \approx \; 72 \quad \Rightarrow \quad N = 13 \qquad \rightarrow$



c) Si a la salida de la Figura-1 se añade:



<u>Responda razonadamente</u> si es posible a partir de $x_2[n]$ recuperar $x_a(t)$ **(1,5 puntos)**

Dado que $x[n]$ son muestras de $x_a(t)$ a la frecuencia de Nyquist, el aliasing que introducen estos dos bloques, que equivalen a un muestreo de un factor 2, no permite recuperar $x_a(t)$ a partir de $x_2[n]$.